Elektron im Elektrischen Feld, Klassisch Relativistisch

Henry S. Grasshorn Gebhardt

June 30, 2010

1 Teilchenbeschleunigung im elektrischen Feld

Nachdem das Teilchen das elektrische Feld passiert hat, hat es die Energie

$$E = m + eU$$

und den Impuls

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{E^2 - m^2} \\ &= \sqrt{2meU + e^2U^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Geschwindigkeit, relativistisch korrekt,

$$\begin{aligned} v = \frac{p}{E} &= \frac{\sqrt{2meU + e^2U^2}}{m + eU} && (1) \\ &= \frac{\sqrt{2meU}}{m} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{e^2U^2}{2meU}}}{1 + \frac{eU}{m}} && (2) \\ &= \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m}}}{1 + \frac{eU}{m}}. && (3) \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist aus der Theorie nach Newton bereits bekannt. Der zweite Faktor wird 1 für kleine Beschleunigungsspannungen U, und stellt die relativistische Korrektur dar.

2 Teilchenbewegung im konstanten elektrischen Feld

Das elektromagnetische Feld sei konstant, wie folgt:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei B eine Konstante ist, die die Stärke des elektrischen Feldes angibt. Die Kraft auf das Elektron der Masse m und der Ladung e ist ganz allgemein

$$\frac{dw^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} w_\nu F^{\nu\mu}, \tag{5}$$

wobei w^μ die Vierergeschwindigkeit und τ ein Parameter der Bewegung ist.

Ausgeschrieben ist das

$$\frac{dw^0}{d\tau} = -\frac{e}{m} w_1 B = \frac{eB}{m} w^1 \tag{6}$$

$$\frac{dw^1}{d\tau} = \frac{e}{m} w_0 B = \frac{eB}{m} w^0 \tag{7}$$

$$\frac{dw^2}{d\tau} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{dw^3}{d\tau} = 0. \tag{9}$$

Leitet man die erste Gleichung nocheinmalnach τ ab, und setzt die zweite ein,

$$\frac{d^2 w^0}{d\tau^2} = \left(\frac{eB}{m}\right)^2 w^0,$$

Damit ist eine Lösung

$$w^0 = K \cosh\left(\frac{eB}{m}\tau\right) \tag{10}$$

$$w^1 = K \sinh\left(\frac{eB}{m}\tau\right) \tag{11}$$

$$w^2 = M \tag{12}$$

$$w^3 = N \tag{13}$$

mit den Integrationskonstanten K, M, N, und den übrigen so gewählt, dass bei $\tau = 0$, $w^1 = 0$.

Die Koordinaten sind dann, in Abhängigkeit von τ,

$$x^0 = K' \sinh\left(\frac{eB}{m}\tau\right) \tag{14}$$

$$x^1 = K' \cosh\left(\frac{eB}{m}\tau\right) - K' \tag{15}$$

$$x^2 = M\tau + R \tag{16}$$

$$x^3 = N\tau + S, \tag{17}$$

wobei $K' = K \cdot m/(eB)$, und R und S weitere Integrationskonstanten sind, und die Integrationskonstanten von x^0 und x^1 sind so gewählt, dass bei $\tau = 0$, $x^0 = x^1 = 0$.

Als weitere Rahmenbedingungen nehmen wir $M = N = R = S = 0$. Damit ergibt sich $K = 1$, da $w_\mu w^\mu = 1$.

Da $w^\mu = dx^\mu/d\tau$ und $x^\mu = (t, x, y, z)$,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{w^1}{w^0}$$

Wir brauchen also w^0 und w^1 an der Stelle an der das Elektron das elektrische Feld verlässt, bei $x^1 = L$. Das Elektron hat dann die Strecke

$$L = \frac{m}{eB}\left(\cosh\left(\frac{eB}{m}\tau_1\right) - 1\right) \tag{18}$$

zurückgelegt. Damit können wir τ_1, oder besser gleich cosh und sinh bestimmen, die wir für w^0 und w^1 brauchen, nämlich

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\frac{eB}{m}\tau_1\right) &= \frac{eBL}{m} + 1, \\
\sinh\left(\frac{eB}{m}\tau_1\right) &= \sqrt{\cosh^2 - 1} \\
&= \sqrt{\frac{e^2B^2L^2}{m^2} + \frac{2eBL}{m}}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich im konstanten elektrischen Feld nach einer Strecke L

die Geschwindigkeit

$$v = \frac{w^1}{w^0} = \frac{\sinh\left(\frac{eB}{m}\tau_1\right)}{\cosh\left(\frac{eB}{m}\tau_1\right)} \tag{19}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{e^2B^2L^2}{m^2} + \frac{2eBL}{m}}}{\frac{eBL}{m} + 1} \tag{20}$$

$$= \sqrt{\frac{2eBL}{m}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{eBL}{2m}}}{1 + \frac{eBL}{m}} \tag{21}$$

$$= \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m}}}{1 + \frac{eU}{m}}, \tag{22}$$

wobei $U = BL$, das Produkt aus elektrischem Feld B und Strecke L die Spannung U ist. Somit erhalten wir wieder das Ergebnis von vorher, Gleichung (3).