

# Mathematische Gedanken zu Rössler

Henry S. Grasshorn Gebhardt

22. Dezember 2008

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Schwarzschildmetrik in Rössler-Koordinaten</b>	<b>1</b>
<b>2 Radiale Bewegungsgleichung</b>	<b>2</b>
<b>3 Eigenzeit eines radial fallenden Beobachters</b>	<b>3</b>
<b>4 Differentielle Beschleunigung</b>	<b>5</b>

### Zusammenfassung

Dieser Aufsatz hält den mathematischen Lösungsweg einiger Gedanken zum  $\mathfrak{R}$ -Theorem Rösslers [2] und Rösslers Folgerungen daraus [3] fest. Nach der Erläuterung der Schwarzschild-Metrik in Rössler-Koordinaten wird die radiale Bewegungsgleichung, die Eigenzeit (endlich), die radiale Beschleunigung und die differentielle radiale Beschleunigung in diesen Koordinaten hergeleitet.

## 1 Schwarzschildmetrik in Rössler-Koordinaten

Ausgehend von der Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

verstehe ich Rössler so, dass er die Koordinaten  $t, \mathfrak{R}, \theta, \phi$ , definiert durch

$$t = t, \quad (2)$$

$$\mathfrak{R} = r - r_N + 2m \ln \frac{r - 2m}{r_N - 2m}, \quad (3)$$

$$\theta = \theta, \quad (4)$$

$$\phi = \phi, \quad (5)$$

als diejenigen Koordinaten ansieht, in denen die Physik einer Newton'schen Intuition am nächsten steht. Dabei ist  $r_N$  eine Konstante, die festlegt, wo  $\mathfrak{R} = 0$  ist.

Damit bekommt man die Differentiale

$$dt = dt, \quad (6)$$

$$d\mathfrak{R} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr, \quad (7)$$

$$d\theta = d\theta, \quad (8)$$

$$d\phi = d\phi \quad (9)$$

und somit die Schwarzschildmetrik in Rössler-Koordinaten

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} d\mathfrak{R}^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (10)$$

wobei  $r = r(\mathfrak{R})$  die Umkehrung von Gl.(3) ist.

Anders ausgedrückt,

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{für } \mu \neq \nu. \quad (11)$$

Im folgenden werde ich gelegentlich die Schreibweise

$$x^0 = t, \quad x^1 = \mathfrak{R}, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi \quad (12)$$

benutzen, falls es die Systematik erfordert.

## 2 Radiale Bewegungsgleichung

Allgemein ist die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens

$$\frac{dv^\mu}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu v^\alpha v^\beta \quad (13)$$

mit  $v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  und den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}), \quad (14)$$

wobei mit der Metrik in Gl.(11) für  $\mu = 0$  nur

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00}$$

ungleich Null sind. Somit ist für  $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dv^0}{ds} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^0 v^\alpha v^\beta \\ &= -\frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{00} + \partial_1 g_{00}) \\ &= -g^{00} \partial_1 g_{00} v^1 v^0 \\ &= -g^{00} \frac{dg_{00}}{ds} v^0. \end{aligned}$$

Da die Metrik in Gl.(11) diagonal ist, gilt  $g^{00} = (g_{00})^{-1}$ , und damit

$$g_{00} \frac{dv^0}{ds} = -\frac{dg_{00}}{ds} v^0.$$

Somit

$$\frac{d(g_{00} v^0)}{ds} = 0.$$

Integration ergibt

$$g_{00} v^0 = k, \quad (15)$$

wobei  $k$  eine Konstante der Bewegung ist.

Dividiert man die Metrik Gl.(10) durch  $ds$ , so erhält man für radiale Bewegung

$$1 = g_{00} (v^0)^2 + g_{11} (v^1)^2. \quad (16)$$

Da  $g_{11} = -g_{00}$  und mit Gl.(15) wird dies nach Multiplikation mit  $g_{00}$  zu

$$\begin{aligned} g_{00} &= (g_{00} v^0)^2 - (g_{00} v^1)^2 \\ 1 - \frac{2m}{r} &= k^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 (v^1)^2 \end{aligned}$$

Nach  $v^1$  aufgelöst

$$v^1 = \frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \pm \left(k^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (17)$$

Wenn ein Beobachter bei  $\mathfrak{R}_0$  mit  $v^1 = 0$  zu fallen anfängt, dann ist

$$k^2 - 1 = -\frac{2m}{r(\mathfrak{R}_0)}$$

und die Radialgeschwindigkeit mit  $r_0 = r(\mathfrak{R}_0)$

$$v^1 = -\left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (18)$$

für  $r(\mathfrak{R}) < r_0$ .

### 3 Eigenzeit eines radial fallenden Beobachters

Die Eigenzeit eines radial fallenden Beobachters mit Start-Radius  $\mathfrak{R}_0$  bis zum Radius  $\mathfrak{R}_1$  ist nach Gl.(18) also

$$\begin{aligned} s &= \int_{\mathfrak{R}_0}^{\mathfrak{R}_1} \frac{ds}{d\mathfrak{R}} d\mathfrak{R} = \int_{\mathfrak{R}_0}^{\mathfrak{R}_1} \frac{1}{v^1} d\mathfrak{R} \\ &= -\int_{\mathfrak{R}_0}^{\mathfrak{R}_1} \left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\mathfrak{R}, \end{aligned}$$

wobei  $r = r(\mathfrak{R})$  durch Gl.(3) gegeben ist.

Um dieses Integral zu lösen substituiert man  $\mathfrak{R}$  nach Gl.(3) und Gl.(7). Dies ist nun eine rein mathematische Operation ohne physikalische Bedeutung. Man erhält

$$\begin{aligned} s &= - \int_{r_0=r(\mathfrak{R}_0)}^{r_1=r(\mathfrak{R}_1)} \left( \frac{2m}{r} - \frac{2m}{r_0} \right)^{-\frac{1}{2}} dr \\ &= - (2m)^{-\frac{1}{2}} \int_{r_0}^{r_1} r^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^{-\frac{1}{2}} dr. \end{aligned}$$

Die weitere Substitution

$$x = \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$r = r_0 (1 - x^2) \quad (20)$$

$$dr = -2 r_0 x dx \quad (21)$$

bringt mit den entsprechenden Grenzen  $x_0$  und  $x_1$

$$\begin{aligned} s &= 2 r_0 (2m)^{-\frac{1}{2}} \int_{x_0}^{x_1} (r_0 (1 - x^2))^{\frac{1}{2}} x^{-1} x dx \\ s &= \left( \frac{2 r_0^3}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Das Integral steht in jeder ordentlichen Formelsammlung:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

Betrachten wir einen Beobachter, der bei  $\mathfrak{R}_0$  anfängt auf das Schwarze Loch zu fallen. Wie lange braucht er, aus seiner Sicht, bis er den Ereignishorizont bei  $\mathfrak{R}_1 = -\infty$  erreicht?

Die Grenzen sind

$$r_1 = r(-\infty) = 2m \quad \text{nach Gl.(3),}$$

$$x_1 = \sqrt{1 - 2m/r_0} \quad \text{nach Gl.(19),}$$

$$r_0 = r(\mathfrak{R}_0) \quad \text{per Definition,}$$

$$x_0 = 0 \quad \text{nach Gl.(19).}$$

Die Eigenzeit dieses Beobachters ist also

$$\begin{aligned} s &= \left( \frac{2 r_0^3}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{1 - 2m/r_0}}{2} \sqrt{\frac{2m}{r_0}} + \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} \right) - 0 \\ s &= r_0 \left( \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} + \sqrt{\frac{r_0}{2m}} \arcsin \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

mit dem Startwert  $r_0 > 2m$ . Dies ist endlich.

## 4 Differentielle Beschleunigung

Man betrachte zwei benachbarte Teilchen in Ruhe mit einem Radialabstand  $d\mathfrak{R}$ . Wie unterscheiden sich ihre radialen Beschleunigungen?

Zunächst ist die radiale Beschleunigung eines Teilchens in Rössler-Koordinaten nach Gl.(13), Gl.(14) und Gl.(11)

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{dv^1}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^1 v^\alpha v^\beta \\ &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11}v^1v^1 - \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{00})v^0v^0. \end{aligned}$$

Ist das Teilchen anfänglich in Ruhe mit  $v^1 = 0$ , so ist seine Beschleunigung

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00}(v^0)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial\mathfrak{R}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (v^0)^2 \\ &= -\frac{r}{2(r-2m)} \left(-2m\left(-\frac{r'}{r^2}\right)\right) (v^0)^2 \\ &= -\frac{mr'}{(r-2m)r} (v^0)^2, \end{aligned}$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $\mathfrak{R}$  bedeutet.

Da  $v^1 = 0$ , erhält man aus Gl.(16)

$$(v^0)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1},$$

außerdem aus Gl.(7)

$$r' = \frac{\partial r}{\partial\mathfrak{R}} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (24)$$

und damit

$$a^1 = -\frac{m}{(r-2m)r}. \quad (25)$$

Der Unterschied in der Radialbeschleunigung zweier Teilchen an den Orten  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R} + d\mathfrak{R}$  ist

$$da^1 = a^1(\mathfrak{R} + d\mathfrak{R}) - a^1(\mathfrak{R}),$$

oder die differentielle Beschleunigung

$$\begin{aligned} \frac{da^1}{d\mathfrak{R}} &= \frac{m}{(r-2m)^2 r^2} (r'r + (r-2m)r') \\ &= \frac{2mr'(r-m)}{(r-2m)^2 r^2} \\ &= \frac{2m(r-m)}{(r-2m)^2 r^2} \frac{r-2m}{r} && \text{mithilfe Gl.(24)} \\ &= \frac{1}{r-2m} \left[ \frac{2m}{r^2} \left(1 - \frac{m}{r}\right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Der Term in eckigen Klammern ist in der Nähe des Schwarzschildradius  $r(-\infty) = 2m$  in etwa konstant gleich  $1/(4m)$ . Also ist der entscheidende Term der erste.

Da  $r = r(\mathfrak{R})$  nur implizit durch Gl.(3) gegeben ist, kann man nicht ohne weiteres den ersten Term von Gl.(26) gegen  $\mathfrak{R}$  auftragen. Nennt man diesen Term  $y$ , so kann man  $\mathfrak{R}$  gegen  $y$  auftragen, indem man nach  $r$  auflöst,

$$y = \frac{1}{r - 2m}$$

$$r = 2m + \frac{1}{y},$$

dann in Gl.(3) mit  $y_N = 1/(r_N - 2m)$  einsetzt,

$$\mathfrak{R} = r - r_N + 2m \ln \frac{r - 2m}{r_N - 2m}$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{y_N} + 2m \ln \frac{y_N}{y}. \quad (27)$$

Die Abb.(1) zeigt den Verlauf.

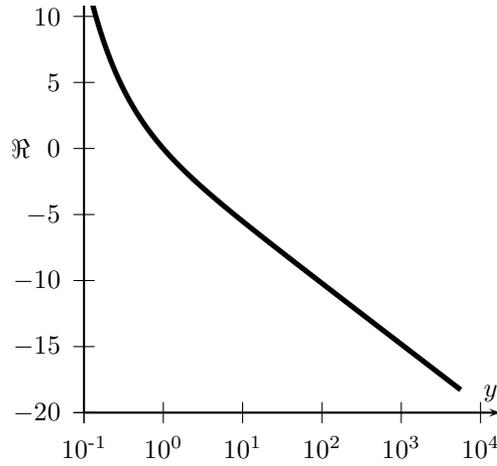


Abbildung 1:  $\mathfrak{R}$  gegen  $y = 1/(r - 2m)$ , Gl.(27) auf einer lin-log Skala mit  $y_N = 1$ ,  $m = 1$ .  $y$  ist der sich noch stark ändernde Teil von  $da^1/d\mathfrak{R}$ . Die Graphik zeigt, dass die differentielle Beschleunigung in Rössler-Koordinaten exponentiell zunimmt, je mehr man sich dem Schwarzschildradius bei  $\mathfrak{R} \rightarrow -\infty$  nähert.

Für große  $y$  erhält man

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{y_N} + 2m \ln y_N - 2m \ln y,$$

das heißt

$$y \propto e^{-\mathfrak{R}/2m} \rightarrow \infty \text{ für } \mathfrak{R} \rightarrow -\infty. \quad (28)$$

Damit ist gezeigt, dass die differentielle Beschleunigung aus Gl.(26) exponentiell mit  $\mathfrak{R} \rightarrow -\infty$  ansteigt, wie man es schon aus Abb.(1) erahnen konnte.

Mit anderen Worten, von zwei benachbarten Teilchen verspürt das dem Schwarzen Loch nähere Teilchen eine ungleich stärkere Anziehungskraft als das weiter entfernte, wenn sie nur dicht genug, aber dennoch unendlich weit vom Ereignishorizont entfernt sind.

Benachbart heißt in diesem Zusammenhang, sofern ich Rössler richtig interpretiere, dass wenn die Teilchen eines Teilchen-Antiteilchen-Paars, das weit weg vom Schwarzen Loch spontan entsteht, typischerweise einen Abstand  $d\mathfrak{R}$  voneinander haben, dann haben auch zwei Teilchen in der Nähe eines Schwarzen Loches typischerweise den Abstand  $d\mathfrak{R}$ .

Es ist somit naheliegend, dass ein Teilchen-Antiteilchen-Paar in der Nähe eines Schwarzen Loches sehr leicht auseinander gerissen wird. Sie können sich dann nicht mehr annähern.

## Danksagung

Ich danke Otto Rössler und Eugen Fischer für die Diskussionen. Der grundlegende Lösungsweg für die radiale Bewegungsgleichung ist von Dirac [1] geändert übernommen.

## Literatur

- [1] P. A. M. Dirac. *The General Theory of Relativity*. Princeton University Press, 1996, 1975.
- [2] Otto E. Rössler. Abraham-like return to constant  $c$  in general relativity: 'R-theorem' demonstrated in Schwarzschild metric. <http://www.wissensnavigator.com/documents/OTTOROESSLERMINIBLACKHOLE.pdf>, 2007.
- [3] Otto E. Rössler. Abraham-Solution to Schwarzschild Metric Implies That CERN Miniblack Holes Pose a Planetary Risk. <http://www.wissensnavigator.com/documents/OTTOROESSLERMINIBLACKHOLE.pdf>, 2007.